Corrigé Examen S1 : Modélisation et Evaluation des Performances des Systèmes

Question de cours (4 pts)

1) **Les outils de modélisation.**

- Les modèles de file d'attente
- Les automates à état finie
- Les réseaux de pétri
- Les processus aléatoires (**1pt**)

2) **L'intérêt du vecteur d'état limit**

L'intérêt du vecteur d'état limite est de savoir si le processus est stable au bout d'un temps suffisamment long, c'est-à-dire que la distribution des états du système reste constante au cours du temps, et que d'autre part, cette distribution ne dépend pas de l'instant initial qui est en général indéterminé. (**2pts**)

3) **Le processus de mort**

Le processus de mort est un cas particulier de processus de Markov en temps continu où les transitions d'état sont de deux types seulement : l'état passe de n à n-1 (**1pt**)

Exercice 1 (4 pts)

Soit X la variable aléatoire « nombre de patients sélectionnés » c'est-à-dire répondant à l'ensemble des critères C.

La variable X suit la loi binomiale de paramètre n=15 et p=0.25 noté B (15; 0,25). **(1pt),**

et $P(X = k) = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$ **(1pt).**

La probabilité qu'aucun patient ne soit sélectionné ce jour est égale à :

$P(X = 0) = C_{15}^0 \times (0.25)^0 \times (0.75)^{15} = 0.013$ **(1pt)**

La probabilité pour qu'il y ait au moins un patient sélectionné est égale à :

$P(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1\text{-}0.013 = 0{,}986$ **(1pt)**

Exercice 2 (6 pts)

On considère la chaine de Markov à trois états {0, 1,2} dont la matrice de transition est donnée par :

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ \alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

1) les valeurs de a et de b pour lesquelles les probabilités stationnaires P_j égalent 1/3, pour j=0, 1,2.

On résout le système
$$\begin{cases} \prod * T = \prod \\ \sum_{i=0}^{2} \prod_i = 1 \end{cases}$$

Corrigé Examen S1 : Modélisation et Evaluation des Performances des Systèmes

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \\ \Pi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ \alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & \beta & 1-\beta \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 \end{bmatrix} \\ \Pi_1 + \Pi_{1} + \Pi_1 = 1 \end{cases}$$ **(0.5 pt)**

On remplace Π1, Π2, Π3 par 1/3, on résout le système on obtient α =1/2 et β =2/3 **(1 pt)**

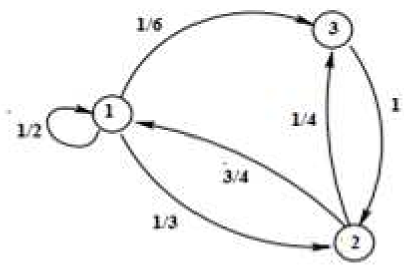
2) Supposons que $\alpha = 3/4$ et β=1.
   a) Montrer que cette chaine est irréductible et apériodique.

Pour que la chaine soit irréductible il faut que tous les états soient communicants. Selon le tableau ci-dessous la chaine est irréductible **0 .5 pt**

	1	2	3
1	1-1	1-2	1-3
2	2-1	2-1-2	2-3
3	3-2-1	3-2	3-2-3

0 .5 pt

La chaine est apériodique car le graphe possède une boucle, PGCD =1 **0 .5 pt**



   b) Si la chaine commence à l'état 1 ; la probabilité qu'il soit à l'état 3 après deux étapes est :

$$p_{1,3}^{(2)} = \sum_{i=1}^{3} p_{1,i} \; p_{i,3}$$ **0 .5 pt**

=1/6 **0 .5 pt**

   c) Les probabilités stationnaires (vecteur d'état limite).

On a, α = 3/4 et β =1 on obtient la chaine de Markov suivantes ;

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Corrigé Examen S1 : Modélisation et Evaluation des Performances des Systèmes

On résout le système
$$\begin{cases} \prod * T = \prod \\ \sum_{i=0}^{2} \prod_i = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \\ \Pi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 \end{bmatrix} \\ \Pi_1 + \Pi_{1} + \Pi_1 = 1 \end{cases}$$

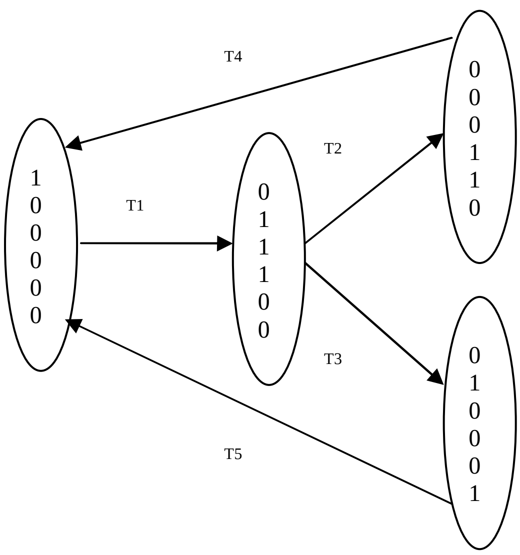
0.5 pt

$$\begin{bmatrix} 3/6 & 2/6 & 1/6 \end{bmatrix}$$

1.5 pts

Exercice 3 (6 pts)

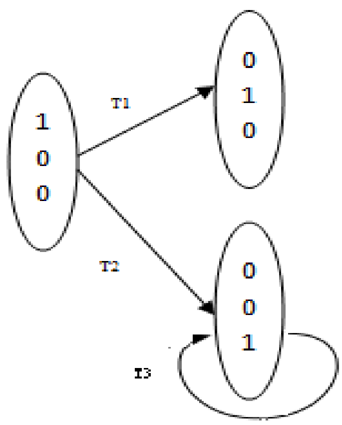
3 pts



- Vivant 0.25
- Quasi vivant 0.25
- 1 Borné 0.25
- Conflit 0.25

(a)

3 pts



- Non Vivant 0.25
- Quasi vivant 0.25
- 1 Borné 0.25
- Conflit 0.25
- Blocage 0.5

(b)